Quälerei mit Logarithmen

Wie berechnet man

Logarithmen?

Datei Nr. 12113

Stand 21. August 2021

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text führt dich in kleinen Schritten in die Welt der Logarithmen. Aber er hat eine Besonderheit:

Du kannst ihn nicht lesen, wie einen normalen Text, denn er besteht aus 19 kleinen Abschnitten, die durchnummeriert sind, und die man der Reihe nach durcharbeiten muss.

Aber lesen alleine reicht nicht aus, denn es gibt viele kleine Aufgaben, die du dabei schriftlich lösen musst. Das ist ganz wichtig. Denn wenn du nur Abschnitt für Abschnitt durchliest, ist der Lerneffekt nicht groß. Hier sollst du mitdenken, selbst rechnen und dann umblättern und die Lösung vergleichen. Das ist ein erprobtes System und heißt ***programmiertes Lernen***.

Und so geht das: Lege Papier **und Schreibzeug** bereit und starte durch.

Du beginnst mit Abschnitt 1 und liest ihn durch. Am Ende steht eine kleine Aufgabe, die du bitte schriftlich löst. Schreibe die Nummer des Abschnitts dazu, damit du später das wieder findest, was du aufgeschrieben hast.

Wenn du fertig bist oder nicht weiterkommst, blättere (auf deinem Bildschirm) auf die nächste Seite zu Abschnitt 2. Dort steht zuerst die Lösung der kleinen Aufgabe, die du hoffentlich gerechnet hast. Vergleiche und lies weiter.

Das geht so bis zum letzten Abschnitt 19

Am Ende gibt es einen kleinen Test, der dir zeigen soll, ob du gut gelernt hast.

Und nun geht es los !

Viel Erfolg!

$\boxed{1}$ ***Logarithmen*** sind die Exponenten (Hochzahlen), mit denen man ***potenziert***.

Die Rechnung $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ ist ein solches Potenzieren.

In der Gleichung $\boxed{2^3 = 8}$ treten 3 Zahlen auf, die je nach ihrer Funktion einen Namen haben:
Die Zahl 2 ist die **Basis** der Potenz, 3 ist der **Exponent,** wozu man auch Hochzahl sagen kann, und 8 ist die **Potenz**, also das **Ergebnis** des Potenzierens.

Aufgabe: Berechne folgende Potenzen:

$2^5 = \boxed{}$, $5^2 = \boxed{}$, $3^4 = \boxed{}$, $4^0 = \boxed{}$, $9^{-1} = \boxed{}$, $9^{\frac{1}{2}} = \boxed{}$

Jetzt geht es weiter auf der nächsten Seite im Abschnitt $\Rightarrow \boxed{2}$

$\boxed{10}$

$$\frac{5^6}{5^4} = \frac{\overbrace{5 \cdot 5 \cdot \cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}^{\text{6 Fünfer}}}{\underbrace{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}}_{\text{4 Fünfer}}} = \boxed{5^{6-4}} = 5^2$$

Man kann 4 Fünfer kürzen, das bedeutet,

dass die Exponenten subtrahiert werden: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Das gilt, wenn $m > n$ ist, wie wir gesehen haben, aber auch wenn $m < n$ ist:

$\frac{5^3}{5^7} = 5^{3-7} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4}$, was man auch durch Kürzen so erkennt:

$$\frac{5^3}{5^7} = \frac{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^4}$$

Der Exponent eines Quotienten ist also die Differenz der Exponenten von Zähler und Nenner:

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Aufgabe: Verdeutliche das an diesen Rechnungen: $\frac{4^{12}}{4^9} = \ldots$ und $\frac{2^3}{2^4} = \ldots$ $\Rightarrow \boxed{11}$

$\boxed{19}$

a) $\log_7 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 7} \approx 1{,}5395$

b) $\log_{18} 3{,}5 = \frac{\log_{10} 3{,}5}{\log_{10} 18} \approx 0{,}4334$

```
log 20÷log 7
      1.53950185
log 3.5÷log 18
     0.4334262418
```

Hier endet diese Logarithmus-Übung

Alles klar?

Dann kannst Du auf Seite 12 noch testen, was du von mit diesen Übungen gelernt hast.

$\boxed{2}$ Hier meine Lösungen der Potenzierungs-Aufgabe:

$$2^5 = \boxed{32}, \quad 5^2 = \boxed{25}, \quad 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}_{9} \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{9} = \boxed{81}, \quad 4^0 = \boxed{1}, \quad 9^{-1} = \boxed{\tfrac{1}{9}}, \quad 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

Konntest du dich noch daran erinnern:

- Jede Zahl hoch 0 ergibt 1.
- Eine Zahl hoch -1 ergibt ihren Kehrwert.
- Eine Zahl hoch $\frac{1}{2}$ ergibt ihre Quadratwurzel.

Diese Rechnungen kann man auch als Gleichungen aufschreiben, bei denen der Exponent gesucht wird. **Beispiele:**

a) $2^x = 8$ Die Lösung ist x = 3 und man nennt sie Logarithmus von 8 zur Basis 2 -

. Man schreibt das dann so auf: $\boxed{\log_2 8 = 3}$

und liest das so: Der Logarithmus von 8 zur Basis 2 ist 3.

Man bezeichnet also den Exponenten auch als Logarithmus zum Ergebnis.

b) $2^x = 32$ hat die Lösung x = 5, also $\boxed{\log_2 32 = 5}$

Aufgabe: Finde die Exponenten und schreibe die passende Logarithmusgleichung dazu auf.

$5^x = 25, \quad 3^x = 81, \quad 12^x = 1, \quad 4^x = \frac{1}{4}$ und $4^x = 2$

Wenn du fertig bist, vergleiche deine Lösung mit meiner im Abschnitt $\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{11}$

$$\frac{4^{12}}{4^9} = 4^{12-9} = 4^3 \quad \text{bzw.} \quad \log_4 \frac{4^{12}}{4^9} = \log_4 4^{12} - \log_4 4^9 = 12 - 9 = 3$$

$$\frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \log_2 \frac{2^3}{2^4} = \log_2 2^3 - \log_2 2^4 = 3 - 4 = -1$$

Nun gibt es noch ein drittes Logarithmengesetz, das wir für unser letztes Thema brauchen:

$\boxed{\log_a b^n = n \cdot \log_a b}$. Das versteht man schnell, wenn man Zahlen sieht:

Es sei $x = 5^4$. Dann berechnen wir $x^3 = \left(5^4\right)^3 = \underbrace{5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4}_{\text{3 Faktoren}} = 5^{4+4+4}$ oder $\boxed{= 5^{4 \cdot 3}}$.

Wir wollen nun den Logarithmus von x^3 berechnen. Wir sehen, dass er 12 ist.
Und diese Zahl entsteht als Produkt von 4 (das ist $\log_5 x$) und dem Exponenten 3.

Oder so: $x = \sqrt{2}^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{2} \cdot 3}$

Dann ist doch $\boxed{\log_2 x = \log_2 \sqrt{2}^3 = 3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \log_2 \sqrt{2}}$

Aufgabe: **Bringe diese Aufgaben in diese Logarithmusform:**

a) $x = 3^{-2} \Rightarrow \log_3 x = ?$ b) $x = 25^4 \Rightarrow \log_5 x = ?$ c) $x = 8^5 \Rightarrow \log_2 x = ?$ $\Rightarrow \boxed{12}$

$\boxed{3}$ Hier meine Lösungen:

$5^x = 25$ führt zu $x = 2$, also $\boxed{\log_5 25 = 2}$

(d. h. Für die Potenz 25 braucht man den Exponenten 2, wenn 5 die Basis ist.)

$3^x = 81$ führt zu $x = 4$, also $\boxed{\log_3 81 = 4}$

(d. h. Für die Potenz 81 braucht man den Exponenten 4, wenn 3 die Basis ist.)

$12^x = 1$ führt zu $x = 0$, also $\boxed{\log_{12} 1 = 0}$

(d. h. Für die Potenz 1 braucht man den Exponenten 0, sogar bei jeder Basis.)

$4^x = \frac{1}{4}$ führt zu $x = -1$, also $\boxed{\log_4 \frac{1}{4} = -1}$

(d. h. Für die Potenz $\frac{1}{4}$ braucht man den Exponenten -1, wenn 4 die Basis ist.)

$4^x = 2$ führt zu $x = \frac{1}{2}$, also $\boxed{\log_4 2 = \frac{1}{2}}$ (das bedeutet $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$)

(d. h. Für die Potenz 2 braucht man den Exponenten $\frac{1}{2}$, wenn 4 die Basis ist.)

Man kann diese Aufgaben auch als Logarithmusaufgaben schreiben.

Beispiel: $\log_4 64 = x$ bedeutet $4^x = 64$, woraus man $x = \log_4 64 = 3$ findet.

(wenn man wichtige Potenzen im Kopf hat.)

Aufgabe: Löse genauso die folgenden Aufgaben:

a) $x = \log_2 32$ b) $x = \log_{16} 4$ c) $x = \log_3 \frac{1}{9}$

Vergleiche deine Lösung im Abschnitt $\Rightarrow \boxed{4}$.

$\boxed{12}$

a) $x = 3^{-2} \Rightarrow \log_3 x = \log_3\left(3^{-2}\right) = -2$ und das zeigt: $x = 3^{-2} \Rightarrow \log_3 x = \boxed{\log_3\left(3^{-2}\right) = -2 \cdot \underbrace{\log_3 3}_{=1}}$

b) $x = 25^4 \Rightarrow \log_5 x = \boxed{\log_5\left(25^4\right) = 4 \cdot \log_5 25} = 4 \cdot 2 = 10$

c) $x = 8^5 \Rightarrow \log_2 x = \boxed{\log_2\left(8^5\right) = 5 \cdot \log_2 8} = 5 \cdot 3 = 15$

Nun wenden wir uns einer ganz neuen Frage zu: Was ist $\log_3 12 = ?$

Die schnellen Denker werden erkennen, dass „das gar nicht geht“. Sie meinen damit wohl, dass man 12 gar nicht als Potenz von 3 darstellen kann, genauer gesagt, nicht mit einem natürlichen Exponenten. Das zeigt diese Folge von Potenzen:

$$3^0 = 1;\quad 3^1 = 3;\quad 3^2 = 9;\quad 3^x = 12;\quad 3^3 = 27;\ \ldots$$

```
3^2.2
            11.21157846
3^2.3
            12.51350253
```

Der Exponent muss wohl eine Zahl zwischen 2 und 3 sein.

Mein Taschenrechner zeigt, dass x zwischen 2,2 und 2,4 liegen muss.

Eine genauere Angabe ist 2,261859507…..$\Rightarrow$ Wir werden im Abschnitt $\boxed{13}$ lernen, wie man das mit einem einfachen Taschenrechner herausfinden kann.

4 **Lösung:**

a) $x = \log_2 32$ bedeutet $32 = 2^x$. Da $2^5 = 32$ ist, folgt $\log_2 32 = 5$.

Man kann dies auch so schreiben: $\log_2\left(2^5\right) = 5$

Merke: *Das heißt: 5 ist der Exponent, den die Basis 2 für das Ergebnis 32 braucht.*

b) $x = \log_{16} 4$ bedeutet $4 = 16^x$. Da $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$ ist, folgt $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

Man kann dies auch so schreiben: $\log_{16}\left(16^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

Merke: *Das heißt: $\frac{1}{2}$ ist der Exponent, den die Basis 16 für das Ergebnis 4 braucht.*

c) $x = \log_3 \frac{1}{9}$ bedeutet $\frac{1}{9} = 3^x$. Da $\frac{1}{9} = 3^{-2}$ ist, folgt $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

Man kann dies auch so schreiben: $\log_3\left(3^{-2}\right) = -2$

Merke: *Das heißt: -2 ist der Exponent, den die Basis 3 für das Ergebnis $\frac{1}{9}$ braucht.*

Ist dir das aufgefallen: $\log_a\left(a^b\right) = b$

Aufgabe: Berechne auf dieselbe Weise diese Logarithmen:

d) $\log_5 625$ e) $\log_{25} 5$ f) $\log_2 \frac{1}{16}$ g) $\log_5 \sqrt[3]{5}$

Weiter nach $\Rightarrow$ 5

---

13 Nun benötigen wir einen Taschenrechner.

Die meisten Schulrechner haben für Logarithmen zwei Eingabetasten vorgesehen: $\boxed{\text{log}}$ und $\boxed{\text{ln}}$.

Wenn man $\boxed{\text{log}}$ 12 eingibt, dann liefert uns der Rechner den Logarithmus zu **Basis 10:**

```
log 12
              1.079181246
10^Ans
                       12
```

Wir schreiben dafür $\log_{10} 12 = 1{,}0791\ldots$ Und wissen hoffentlich noch, was damit berechnet worden ist. Der Logarithmus ist der Exponent, den die Basis 10 benötigt, damit das Ergebnis 12 ist.
Das zeigt die zweite Zeile des Screenshots.
Dort steht allerdings 10^{Ans}. Das bedeutet, dass als Exponent das zuletzt berechnete Ergebnis verwendet wird. Damit erspart man sich das Eintippen von 1,079181246 ☺.

Nun teste bitte die andere Logarithmus-Taste: Wenn man $\boxed{\text{ln}}$ 12 eingibt, verwendet der Rechner die **Eulersche Zahl e** als Basis. Den dann berechneten Logarithmus nennt man dann den **natürlichen Logarithmus von 12,** daher die Abkürzung ln („Logarithmus naturalis“).

Berechne bitte **ln 12** und mache dazu die Probe mit der Basis e. $\Rightarrow$ 14

$\boxed{5}$ Lösung:

d) $\log_5 625 = x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = 625$ Wegen $5^4 = \underbrace{5 \cdot 5}_{25} \cdot \underbrace{5 \cdot 5}_{25} = 625$ ist $x = \log_5 625 = 4$

e) $\log_{25} 5 = x \quad \Leftrightarrow \quad 25^x = 5$ Wegen $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$ ist $x = \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$

f) $\log_2 \frac{1}{16} = x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = \frac{1}{16}$ Wegen $2^4 = 16$ folgt $2^{-4} = \frac{1}{16}$ und $x = \log_2 \frac{1}{16} = -4$

g) $\log_5 \sqrt[3]{5} = x \quad \Leftrightarrow \quad 5^x = \sqrt[3]{5}$ Wegen $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ folgt $x = \log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$

Nun wollen wir Logarithmen berechnen, die eine Problematik aufweisen:

Die Aufgabe $x = \log_8 4$ bedeutet $4 = 8^x$. Das ist nun schwer, denn 4 ist keine ganzzahlige Potenz von 8. Es gibt hier eine einfache Methode: **Man muss 4 und 8 zuerst auf die gemeinsame Basis 2 umrechnen.** Damit kann man die Exponentialgleichung verändern:

$\boxed{4 = 2^2}$ und $\boxed{8 = 2^3}$ Also kann man die Gleichung $4 = 8^x$ umschreiben in $2^2 = \left(2^3\right)^x \Leftrightarrow \boxed{2^2 = 2^{3x}}$

Potenzen mit der gleichen Basis sind nur dann gleich groß, wenn auch die Exponenten gleich sind.

Also vergleicht man die Exponenten. Aus $3x = 2$ folgt $x = \frac{2}{3}$. Hier nun die ganze Lösung am Stück:

$$x = \log_8 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = 8^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^2 = 2^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_8 4 = \tfrac{2}{3}}$$

Aufgabe: Gehe genauso vor:

a) $\log_9 27$ b) $\log_4 32$ c) $\log_{32} 4$ d) $\log_{100} 1000$

Weiter zu $\Rightarrow \boxed{6}$

$\boxed{14}$ Der neue Screenshot zeigt zuerst, wie man die Eulersche Zahl e berechnet: $e \approx 2{,}71828\ldots$.

```
e^1
            2.718281828
ln 12
             2.48490665
e^Ans
                     12
```

Dann wurde $\ln e \approx 2{,}4849$ berechnet, was man eigentlich auch als $\log_e 12 \approx 2{,}4819$ schreiben kann. In der 3. Zeile folgt die Kontrolle dazu: Mit Ans wird das genaue Ergebnis 2,484909… eingesetzt.

Also haben wir den natürlichen Logarithmus von 12 berechnet: $\ln 12 \approx 2{,}4849$

Probiere das noch einmal damit:

Berechne a) $\ln 4{,}7$ b) $\ln \sqrt{2}$ und c) $\ln 1$. $\Rightarrow \boxed{15}$

$\boxed{6}$ **Lösung:**

a) $\log_9 27 = x \Leftrightarrow 27 = 9^x$ Gemeinsame Basis ist 3:

$3^3 = \left(3^2\right)^x = 3^{2x} \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_9 27 = \frac{3}{2}}$

b) $\log_4 32 = x \Leftrightarrow 32 = 4^x$ Gemeinsame Basis ist 2:

$2^5 = \left(2^2\right)^x = 2^{2x} \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_4 32 = \frac{5}{2} = 2{,}5}$

c) $\log_{32} 4 = x \Leftrightarrow 4 = 32^x$ Gemeinsame Basis ist 2:

$2^2 = \left(2^5\right)^x = 2^{5x} \Leftrightarrow 5x = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_{32} 4 = \frac{2}{5} = 0{,}4}$

d) $\log_{100} 1000 = x \Leftrightarrow 1000 = 100^x$ Gemeinsame Basis ist 10:

$10^3 = \left(10^2\right)^x = 10^{2x} \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_{100} 1000 = \frac{3}{2} = 1{,}5}$

Nun verwende ich Brüche als Basis. Die Methode ist dieselbe: Verwende eine gemeinsame Basis!

Beispiel: $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x \Leftrightarrow 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^2 = \left(2^{-1}\right)^x \Leftrightarrow 2^2 = 2^{-x} \Leftrightarrow -x = 2 \Leftrightarrow \boxed{x = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2}$

Aufgabe: a) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$ b) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ c) $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{4}$ d) $\log_{\frac{1}{9}} 27$

Weiter zu $\Rightarrow \boxed{7}$

$\boxed{15}$

Wir wollen nun $\log_3 12 = ?$ berechnen. Für Logarithmen zur Basis 3 ist natürlich kein Rechner eingerichtet. Aber es gibt ja die Mathematik, die uns jetzt dabei hilft.

Das geht so: Gesucht ist	$x = \log_3 12$	(1)
Umschreiben in eine Exponentialgleichung:	$12 = 3^x$	(2)
Diese Gleichung wird logarithmiert:	$\log_{10} 12 = \log_{10}\left(3^x\right)$	(3)
Vereinfachen mit dem 3. logarithmischen Gesetzt:	$\log_{10}\left(3^x\right) = x \cdot \log_{10} x$	(4)
(4) in (3) einsetzen:	$\log_{10} 12 = x \cdot \log_{10} 3$	(5)
Nach x umstellen:	$x = \dfrac{\log_{10} 12}{\log_{10} 3}$	

Jetzt können wir den gesuchten Logarithmus x mit einem Taschenrechner ermitteln:
IN der 3. Zeile steht die Kontrolle!

```
log 12÷log 3
             2.261859507
ln 12÷ln 3
             2.261859507
3^Ans
                      12
```

Man erkennt auch, dass es egal ist, welche Logarithmusart uns dabei helfen soll.

Ergebnis: $\log_3 12 \approx 2{,}2619$

Aufgabe: Berechne $\log_5 10$ $\Rightarrow \boxed{16}$

$\boxed{7}$ Lösung:

a) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} = x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{5} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad 5^{\frac{1}{2}} = 5^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad -x = \tfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} = -\tfrac{1}{2}}$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x \quad \Leftrightarrow \quad 27 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 = 3^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad -x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3}$

c) $\log_{\frac{1}{8}} \tfrac{1}{4} = x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{8}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-2} = 2^{-3x} \quad \Leftrightarrow \quad -3x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_{\frac{1}{8}} \tfrac{1}{4} = \tfrac{2}{3}}$

d) $\log_{\frac{1}{9}} 27 = x \quad \Leftrightarrow \quad 27 = \left(\tfrac{1}{9}\right)^x \quad \Leftrightarrow \quad 3^3 = 3^{-2x} \quad \Leftrightarrow \quad -2x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_{\frac{1}{9}} 27 = -\tfrac{3}{2}}$

Nun treiben wir es auf die Spitze und verwenden Wurzeln als Basen. Beispiele:

e) $\log_{\sqrt{2}} 8 = x \quad \Leftrightarrow \quad 8 = \sqrt{2}^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^{\frac{1}{2}x} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \log_{\sqrt{2}} 8 = 6}$

f) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt{3} = x \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{27}^x \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3^3}^x \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}x} \Leftrightarrow \tfrac{3}{2}x = \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x = 3 = \log_{\sqrt{27}} \sqrt{3}}$

Wozu man dies braucht? Eigentlich gar nicht ☹. Wir üben hier auf hohem Niveau! Wenn man diese Aufgaben beherrscht, dann kann man sicher mit Logarithmen umgehen und wird sicher im Umgang mit Potenzen. Löse bitte diese **Aufgaben**:

g) $\log_{\sqrt{2}} \tfrac{1}{8}$ h) $\log_{\sqrt{10}} \tfrac{1}{100}$ i) $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$ k) $\log_{2\sqrt{2}} \sqrt{\tfrac{1}{32}}$. $\Rightarrow \boxed{8}$

$\boxed{16}$ Lösung zu $\log_5 10$:

a) $x = \log_5 10$ bedeutet $5^x = 10$

Logarithmieren: $\log_{10} 5^x = \log_{10} 10$ Es ist $\log_{10} 10 = 1$,denn $10^1 = 10$

also $x \cdot \log_{10} 5 = 1$

Daraus folgt: $x = \dfrac{1}{\log_{10} 5} \approx$

```
1÷log 5
            1.430676558
```

Ergebnis: $\log_5 10 \approx 1{,}43$

Kontrolle (Näherungsweise)

```
5^1.43
            9.989117144
```

Aufgabe:

Nun berechne noch $\log_2 100$ und $\log_{12} 0{,}5$ $\Rightarrow \boxed{17}$

$\boxed{8}$ So, das war nun wirklich nichts für schwache Nerven. Vielleicht du es dennoch geschafft:

g) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = x \iff \frac{1}{8} = \sqrt{2}^{x}$ Jetzt umschreiben in Potenzen der Basis 2:

$8 = 2^3$, also $\frac{1}{8} = 2^{-3}$. $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ also $\sqrt{2}^{x} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x} = 2^{\frac{1}{2}x}$. Damit heißt die Aufgabe:

$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = x \iff \frac{1}{8} = \sqrt{2}^{x} \iff 2^{-3} = 2^{\frac{1}{2}x}$.

Man vergleicht die Exponenten und erhält: $\frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow \boxed{x = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8} = -6}$

h) $\log_{\sqrt{10}} \frac{1}{100} = x \iff \frac{1}{100} = \sqrt{10}^{x} \iff 10^{-2} = 10^{\frac{1}{2}x} \iff \frac{1}{2}x = -2 \iff \boxed{x = \log_{\sqrt{10}} \frac{1}{100} = -4}$

i) $\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = x \iff 9\sqrt{3} = \sqrt{3}^{x}$ … Man schreibt $9\sqrt{3} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2+\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$. Dann folgt:

$\log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = x \iff 9\sqrt{3} = \sqrt{3}^{x} \iff 3^{\frac{5}{2}} = 3^{\frac{1}{2}x} \iff \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} \iff \boxed{x = \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3} = 5}$

k) $\log_{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{32}} = x \iff \sqrt{\frac{1}{32}} = \left(2\sqrt{2}\right)^{x}$. Diese Aufgabe kann man als Rätsel ansehen. Aber unsere Methode hilft auch hier, wenn man das herausfindet:

$2\sqrt{2} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt{\frac{1}{32}} = \sqrt{\frac{1}{2^5}} = \sqrt{2^{-5}} = \left(2^{-5}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-5\cdot\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{5}{2}}$. Weiter geht es so:

$\log_{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{32}} = x \iff \sqrt{\frac{1}{32}} = \left(2\sqrt{2}\right)^{x} \iff 2^{-\frac{5}{2}} = 2^{\frac{3}{2}x} \iff \frac{3}{2}x = -\frac{5}{2} \iff \boxed{x = -\frac{5}{3} = \log_{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{32}}}$

Es geht weiter im Anschnitt $\Rightarrow \boxed{9}$

$\boxed{17}$

$x = \log_2 100 \iff 2^x = 100$	$x = \log_{12} 0{,}5 \iff 12^x = 0{,}5$
$\log_{10} 2^x = \underbrace{\log_{10} 100}_{=2}$	$\log_{10} 12^x = \log_{10} 0{,}5$
$x \cdot \log_{10} 2 = 2$	$x \cdot \log_{10} 12 = \log_{10} 0{,}5$
$x = \dfrac{2}{\log_{10} 2} \approx$	$x = \dfrac{\log_{10} 0{,}5}{\log_{10} 12} \approx$

Probe:

```
2÷log 2
                6.64385619
2^Ans
                       100
```

```
log .5÷log 12
             -0.2789429457
12^Ans
                       0.5
```

Ergebnis: $\log_2 100 \approx 6{,}644$ $\log_{12} 0{,}5 \approx -0{,}279$

Aufgabe: Findest Du eine Formel für die Berechnung von $x = \log_b a$?

Führe dieselbe Rechnung allgemein durch! $\Rightarrow \boxed{18}$

$\boxed{9}$ Es gibt drei wichtige Regeln für Potenzen mit gleicher Basis: Diese müssen wir wiederholen und dann auf Logarithmen übertragen.

1. Zur Erinnerung: 5^3 bedeutet, dass 5 dreimal mit sich selbst multipliziert wird.
2. Was ergibt $5^3 \cdot 5^4$? Wenn man es ganz ausführlich aufschreibt, dann heißt diese Rechnung:

$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3} \cdot \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^4} = \boxed{5^9}$. Denn 3 Fünfer und 4 Fünfer ergeben zusammen 9 Fünfer

Es gilt also $\boxed{5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4}}$

Also Potenzregel schreibt man dies so auf: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$.

Jetzt verwende ich den Begriff Logarithmus:

Der Logarithmus von $a^m \cdot a^n$ ist also die Summe der Logarithmen von a^m und a^n.

Oder so: $\boxed{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ wenn ich a_m mit x und a_n mit y bezeichne.

Beispiele dazu: $\log_2 (16 \cdot 32) = \log_2 16 + \log_2 32 = 4 + 5 = 9$

Kontrolle: $\log_2 (16 \cdot 32) = \log_2 \left(2^4 \cdot 2^5\right) = \log_2 \left(2^9\right) = 9$

$\log_3 (243 \cdot 27) = \log_3 243 + \log_3 27 = 5 + 3 = 8$

Kontrolle: $\log_3 (243 \cdot 27) = \log_3 \left(3^5 \cdot 3^3\right) = \log_3 \left(3^8\right) = 8$

Untersuche genauso: Was gibt $\frac{5^6}{5^4} = \ldots$? Wie könnte die Logarithmusregel dazu aussehen?

Der nächste Abschnitt $\boxed{10}$ steht auf Seite 3!

$\boxed{18}$ Gesucht ist $x = \log_b a$.

Rechnung: $b^x = a$

Logarithmieren: $\log_{10} b^x = \log_{10} a$

Umformen: $x \cdot \log_{10} b = \log_{10} a$

Ergebnis. $\boxed{x = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} = \ldots}$

Das ist praktisch! Wenn man so $\log_7 20$ sucht,

gibt man in den Taschenrechner ein: $\boxed{\log a : \log b}$ und erhält das Ergebnis.

Teste das für a) $\log_7 20$ und für b) $\log_{18} 3{,}5$.

Der nächste Abschnitt $\boxed{19}$ steht auf Seite 3!

Abschließender Test:

1) Löse die folgenden Gleichungen und schreibe das Ergebnis als Logarithmus auf:

a) $4^x = 64$ b) $3^x = \frac{1}{9}$ c) $16^x = 4$

2) Schreibe die Logarithmusgleichung in eine Exponentialgleichung um:

a) $\log_2 128 = 7$ b) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$ c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5$

3) Schreibe die Logarithmusgleichung in eine Exponentialgleichung um und berechne x:

a) $x = \log_{10} 1000$ b) $\log_x 81 = 4$ c) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

4) Überprüfe, ob diese Ergebnisse richtig sind:

a) $\log_4 \frac{1}{4} = -1$ b) $\log_{\sqrt{4}} 4 = 2$ c) $\log_{27} \sqrt{3} = \frac{1}{6}$

5) Ersetze x durch einen geeigneten Ausdruck.

a) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 x$ b) $\log_a 20 - \log_a 5 = \log_a x$ c) $4 \cdot \log_a 2 = \log_a x$

6) Berechne mit dem Taschenrechner

a) $\log_{10} 23$ b) $\log_e 5$ c) $\ln 13$

d) $\log_6 8$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 12$ f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

Die Lösungen stehen auf der nächsten Seite.

Lösungen

1) a) $4^x = 64 \quad \Rightarrow \quad x = \log_4 64 = 3,$ denn $4^3 = 64$

b) $3^x = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \log_3 \frac{1}{9} = -2,$ denn $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $16^x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \log_{16} 4 = \frac{1}{2},$ denn $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

2) a) $\log_2 128 = 7 \quad \Leftrightarrow \quad 128 = 2^7$

b) $\log_9 3 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 9^{\frac{1}{2}} \quad (= \sqrt{9})$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

3) a) $x = \log_{10} 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 1000 = 10^x \quad \Rightarrow \quad x = 3$

b) $\log_x 81 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 81 = x^4 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

c) $\log_4 x = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

4) a) $\log_4 \frac{1}{4} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = 4^{-1}$ Richtig.

b) $\log_{\sqrt{4}} 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \sqrt{4}^2$ Richtig.

c) $\log_{27} \sqrt{3} = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = 27^{\frac{1}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{3 \cdot \frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}$ Richtig.

5) a) $\log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 x \quad \boxed{= \log_2 (5 \cdot 3) = \log_2 15}$ also ist x = 15.

b) $\log_a 20 - \log_a 5 = \log_a x \quad \boxed{= \log_a \frac{20}{5} = \log_a 4}$ also ist x = 4

c) $4 \cdot \log_a 2 = \log_a x \quad \boxed{= \log_a 2^4 = \log_a 16}$ also ist x = 16

6) a) $\log_{10} 23$

b) $\log_e 5$

c) $\ln 13$

```
log 23
            1.361727836
ln 5
            1.609437912
ln 13
            2.564949357
```

d) $\log_6 8$

e) $\log_{\frac{1}{2}} 12$

f) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

```
log 8÷log 6
           1.160558422
log 12÷log .5
          -3.584962501
log √3÷log √2
           1.584962501
```